

다차원공간제한기법(MLP)의 불연속갤러킨(DG) 기법으로 확장 적용에 관한 연구

Extension of Multi-dimensional Limiting Process for Discontinuous Galerkin Methods on Unstructured Grids

박진석*, 김종암(서울대학교)

1. 서 론

다차원 공간 제한 기법(MLP)는 유한체적법(FVM)에 대해서 성공적으로 개발되었다. TVD 또는 ENO-type 과 같은 다른 공간 제한 기법에 비해, MLP 기법은 다차원 공간에서 수치 진동을 효율적으로 제어할 수 있는 장점이 있다. 이론적으로 MLP 공간 제한 기법은 Maximum principle 을 만족하여 L^∞ norm 차원에서 다차원 단조성을 보장할 수 있다. 일련의 연구를 통해서 다양한 비점성 및 점성 유동을 해석시 MLP 기법을 적용한 결과 기존 기법에 비해서 정확성 및 수렴성 등에서 향상되었음을 확인할 수 있었다 [1, 2, 3].

최근들어 불연속 갤러킨 기법(DG)는 복잡한 형상에 쉽게 적용 가능하며 고차 내삽시 적은 인접 격자 정보만 이용하는 장점이 있어, 쌍곡 편미분 방정식을 고차 정확도로 해석하는데 널리 사용되고 있다. 그러나 가장 문제가 되는 부분은 불연속 구간에서 불필요한 수치 진동을 억제할 수 있는 공간 제한 메커니즘이 불완전하다는 점이다. 그동안 FVM 에서 널리 쓰이던 TVB 기반 제한 기법 이나 WENO-type 제한 기법을 활용하여 수치 진동을 억제하기 위한 시도가 이루어져 왔으나, 이들 기법은 다차원 유동 해석시 충격파등의 구간에서 수치 진동을 제어하는데 한계가 있었다. 본 연구에서는 이를 해결하기 위해 기존의 FVM 기반 MLP 기법을 DG framework 으로 확장하여 강건하고 정확한 공간 제한 기법을 개발하고자 하였다. 우선 MLP 기법의 특징을 간단히 소개한 후 DG 로 확장되는 과정에 대해서 다루고자 한다.

2. 다차원 공간 제한 기법

다차원 단조성을 보장하기 위해서 본 연구에서는 1 차원 단조 조건을 확장한 다차원 공간 제한 기준(MLP 조건)을 이용하였다. MLP 조건의 기본 개념은 격자 중심점뿐 아니라 격자 꼭지점에서 물성치의 분포를 제어하여 다차원 물리 유동 특성을 반영하고자 한 것이다. 특히 내삽 과정에서 격자 꼭지점에서 유동 분포를 적절히 제어하면 격자 중심점에서의 유동 분포 역시 단조성을 만족시킬수 있을 것이라는 가정하였다. 이와같은 기본 개념을 바탕으로 격자 꼭지점에서의 값이 다음과 같은 MLP 조건(식 (1))을 만족하도록 하였다.

$$\bar{q}_{v_i}^{\min} \leq q_{v_i} \leq \bar{q}_{v_i}^{\max}, \quad (1)$$

여기서 q_{v_i} 는 꼭지점에서 물성치이며, $\bar{q}_{v_i}^{\max/\min}$ 는 꼭지점 v_i 주위 격자 평균값의 최대/최소값이다. MLP 조건은 격자계에 관계없이 구현될 수 있다 [1, 2, 3].

이러한 MLP 조건의 특징은 다차원 공간에서 단조성을 설명할 수 있는 Maximum principle 을 만족한다는 점이다. 이 성질은 2-D 및 3-D 비정렬 격자계에 대해서 증명되었으며 [3], 이는 다음과 같이 정리할 수 있다.

정리 1. Maximum principle 만족성

다차원 쌍곡 보전형 지배 방정식에 대하여 이산화된 기법이 Lipschitz 연속 단조 수치 Flux 를 사용하는 경우, 선형 재분포한 결과가 다차원 공간 제한 기준을 만족

할 경우 아래와 같은 국소적인 Maximum principle 을 만족한다.

$$\begin{aligned} \min_{v_i \in T_j}(\bar{q}_{v_i}^{\min,n}) &\leq \bar{q}_j^n \leq \max_{v_i \in T_j}(\bar{q}_{v_i}^{\max,n}), \\ \min_{v_i \in T_j}(\bar{q}_{v_i}^{\min,n+1}) &\leq \bar{q}_j^{n+1} \leq \max_{v_i \in T_j}(\bar{q}_{v_i}^{\max,n+1}). \end{aligned} \quad (2)$$

정리 1 의 결과를 모든 계산 영역에 적용하게 되면 전체적으로 L^∞ norm 차원에서 수치적으로 안정성을 만족하게 됨을 보일 수 있다. 또한 이러한 조건은 다차원 공간에서 Local Extrema Diminishing 조건을 만족하게 된다.

3. 불연속 갤러킨 기법으로 MLP 확장

불연속 갤러킨 기법의 Shape function 을 통해 격자 내부의 분포를 재생성하므로, 매우 높은 공간 정확도를 유지할 수 있는 장점이 있다. 그러나 유한 체적법과 같은 다른 기법에 비해 수치적으로 불안정하다는 문제점이 있다. 특히 불연속적인 해가 존재하는 쌍곡형 편미분 방정식에 이 기법을 적용하는데 어려움이 있었다. 이를 해결하기 위하여 수치적으로 안정한 TVD Runge-Kutta 시간 전진 기법과 더불어 공간 제한 기법이 사용되고 있다.

불연속 갤러킨 기법에서 사용되는 공간 제한 기법은 크게 2 개의 요소로 구성된다. 우선 Troubled-cell Marker 를 통해서 제한 기법이 필요한 구간을 구분하고 이 영역에 대해서 공간 제한자를 이용하여 이들 격자의 내부 분포를 조절하게 된다. 그동안 다양한 기법들이 개발되었으나, 일부 연속적인 구간에서 과도하게 제한자가 작동하여 정확성이 저하되거나 과도한 Overhead 를 유발하는 문제점이 있었다. 이를 해결하기 위해 본 연구에서는 유한 체적법을 바탕으로 개발된 MLP-u 기율기 제한자와 [3] 더불어서 MLP-based Troubled-cell Marker 를 제안하였다.

격자 내부 분포를 선형이 아닌 그 이상의 고차로 재생성할 경우 이 분포의 최대/최소 값이 꼭지점에서 발생하지 않는다. 그 결과 앞서 제안하였던 MLP 조건만으로는 Maximum

principle 을 위배하는 문제가 되는 격자를 구분하는데 한계가 있다. 이를 보완하기 위해서 각 꼭지점에 대해서 아래와 같은 강화된 MLP 조건을 활용하였다 [4].

$$q_{v_i}^h \leq q_{v_i}^{h,\max} \leq \bar{q}_{v_i}^{\max}, \quad \bar{q}_{v_i}^{\min} \leq q_{v_i}^{h,\min} \leq q_{v_i}^h, \quad (3)$$

여기서 $q_{v_i}^h$ 는 꼭지점 v_i 에서 DG 로 내삽한 값이며 $q_{v_i}^{h,\max/\min}$ 는 꼭지점 v_i 주위 격자에서 내삽한 값의 최대/최소값이다.

이 조건 적용시 clipping 현상으로 극점 주위에서 정확성이 저해할 우려가 있다. 이를 방지하기 위해 MLP Stencil 을 고려하여 극점을 포착할 수 있는 간단한 형태의 Extrema detector 를 추가적으로 도입하였다.

$$\Delta \bar{q}_{v_i} = \bar{q}_{v_i}^{\max} - \bar{q}_{v_i}^{\min} \leq (K\Delta x)^2. \quad (4)$$

식 (3), (4)를 통해서 개발한 MLP-based troubled-cell Marker 과 MLP 기율기 제한자를 이용하면 다음과 같이 MLP 기법을 불연속 갤러킨 기법으로 확장할 수 있다. 우선 개발한 troubled-cell Marker 를 이용하여 유동 변화가 적은 영역에서는 고차 정확도를 갖는 DG 내삽법을 사용하고 유동 변화가 심한 구간에서는 MLP 기율기 제한자를 적용하여 다차원 수치진동을 제어하였다.

Euler 방정식에 대하여 개발한 MLP 기법을 적용하는데 있어서는 유동 물리 특성을 반영해야 한다. 이를 위해서 Troubled-cell Marker 단계에서는 물리적인 불연속 해를 반영할 수 있는 밀도 또는 엔트로피 변량을 이용하였다. 기율기 제한자 단계에서는 유한체적법에서 MLP 기법과 같이 Conservative variable 에 대하여 기율기 제한자를 적용하였다.

4. 수치 해석 결과

4.1 A Mach 3 Wind tunnel with a Step

이 문제는 수치 기법의 고해상도를 파악하는 점으로 널리 알려진 문제이다. 0.2 높이의 계단이 있는 관 내부에 마하 3 의 자유류를 불러 넣어 4

초까지 관내 파동 분포를 분석한다. 계단 주변에 특이점이 발생하는 점을 고려해야 하는데, 본 해석에서는 이 부근에 조밀한 격자를 사용하였다.

Figure 1 은 밀도 분포를 나타낸 결과로서 MLP 기법을 이용한 유한체적법 결과와 불연속 갤러킨 기법의 결과를 비교한 것이다. 두 기법 모두 단조성을 만족하는 해를 주고 있으나, DG 기법을 이용한 경우 Triple point 이후 생기는 미끄럼 유선의 복잡한 유동 특성을 매우 정밀하게 포착하고 있음을 확인할 수 있다.

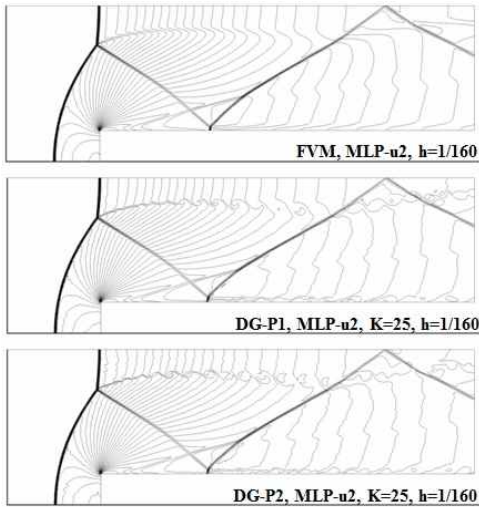


Fig. 1 Comparison of density contours for the Mach 3 wind tunnel with a step.

4.2 Double Mach Reflection

이 문제는 수치 기법의 고해상도를 실험하는데 널리 알려진 문제이며, $M=10.0$ 인 강한 이동 충격파가 30° 로 입사하여, 시간에 따라 궁형 충격파, 삼중점 및 복잡한 유동 구조를 만들어 낸다. 삼각형 요소 한 변의 길이 $h=1/300$ 인 격자에서 수치 실험을 수행하였다. Lax-Freidrich Flux 기법을 사용하였다.

Figure 2 는 Mach stem 부근에서 밀도 분포를 비교한 결과이다. MLP 제한자를 적용한 불연속 갤러킨 기법을 적용한 경우 미끄럼 유선 주위에 복잡한 유동 특성을 좀 더 정밀하게 포착하고 있음을 확인할 수 있다.

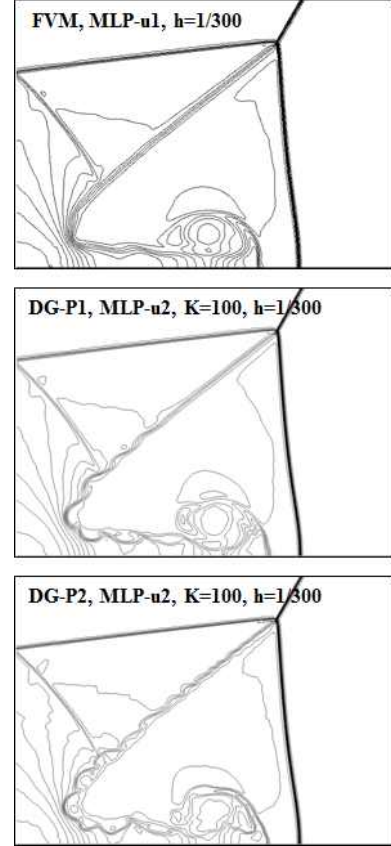


Fig. 2 Close-up view around the double Mach stem.

4.3 Interaction of Shock wave with 2-D Wedge

충격파 및 와도의 상호 작용을 보기 위해 일정한 크기의 쉘기에 이동 충격파가 지나면서 생기는 복잡한 물리 현상을 계산하였다. 계산 영역은 $[-2.5, 4.6] \times [-2.5, 2.5]$ 이며 원점에 한 변의 길이가 1 인 정삼각형 형태의 쉘기가 놓여 있다. 초기 충격파는 $x=0$ 에 존재하며 그 강도는 $M_s = 1.34$ 이다. RoeM flux 기법을 적용하였다.

Figure 3 는 3.25 초일때 Numerical Schlieren image 를 비교한 결과이다. MLP 제한자를 적용한 불연속 갤러킨 기법의 경우 충격파-와도 상호작용에 따른 복잡한 물리 현상을 정밀하게 포착했음을 확인할 수 있었다.

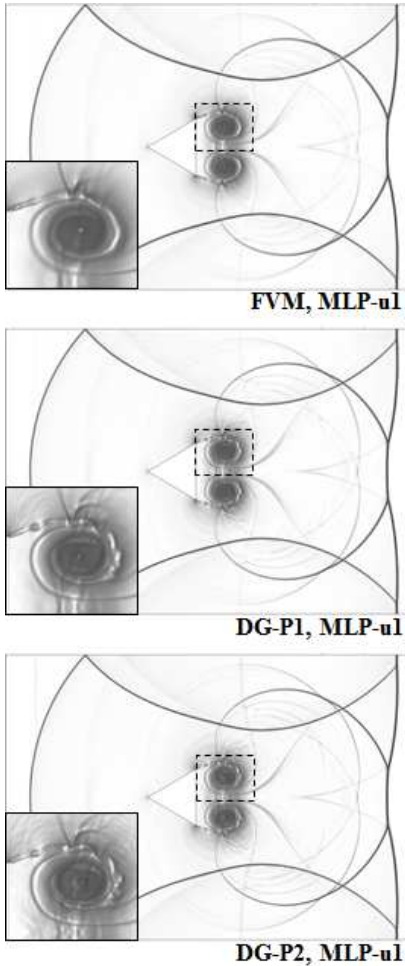


Fig. 3 Comparison of numerical Schlieren images on interaction of shock wave with 2-D wedge at $t = 3.25$.

5. 결 론

본 연구를 통해서 MLP 기법을 불연속 갤러킨 기법으로 확장 구현하여 비정렬 격자계에 대해 고차 공간 정확도를 갖는 강건하고 효율적인 수치 알고리즘을 개발하였다. 개발한 기법은 복잡한 다차원 물리 유동 특징을 불필요한 수치 진동을 야기하지 않으면서 정확하게 포착할 수 있다. 다양한 수치 실험을 통해서 개발된 기법이 갖는 다차원 단조성 만족, 향상된 정확성 및

효율성등의 여러 장점을 확인할 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 우주기초원천기술개발 사업(NSL, National Space Lab, 과제번호 20090091724), 2010 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 국가수리과학연구소의 주요사업 (No. A21001), 국토해양부 건설기술혁신사업 초장대교량사업단 (08 기술혁신 E01) 및 국방과학연구소 장기기초 연구사업의 지원으로부터 지원받아 수행되었습니다.

참고문헌

1. K. H. Kim and C. Kim, Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows, part II: Multi-dimensional limiting process, *JCP*, Vol. 208, 2005, pp 570-615.
2. S.-H. Yoon, C. Kim and K. H. Kim, Multi-dimensional Limiting Process for Three-dimensional Flow Physics Analyses, *JCP*, Vol. 227, 2008, pp 6001-6043.
3. J. S. Park, S.-H. Yoon and C. Kim, Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids, *JCP*, Vol. 229, 2010, pp 788-812.
4. J. S. Park and C. Kim, Multi-dimensional limiting process for discontinuous Galerkin methods on unstructured grids, *ICCFD6*, 2010, Russia